Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

9-й класс

1. Можно ли в выражении

$$2 * 0 * 1 * 2 * 2 * 0 * 1 * 2 * \cdots * 2 * 0 * 1 * 2 = 2013$$

(слева — 2013 групп, каждая из которых состоит из цифр 2, 0, 1, 2) поставить вместо звёздочек знаки сложения и умножения (скобки ставить нельзя) так, чтобы получилось верное равенство?

2. Можно ли в клетках таблицы 2012×2013 (2012 строк и 2013 столбцов) расставить числа ± 1 так, чтобы произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце было отрицательным?

3. Доказать, что уравнение $x^2 + y^3 + z^4 = w^7$
   1) имеет хотя бы одно решение в натуральных числах;
   2) имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC вне его построены равнобедренные прямоугольные треугольники ABE и BCF с прямыми углами E и F соответственно, D — середина стороны AC. Доказать, что треугольник DEF — равнобедренный прямоугольный с прямым углом D.

5. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 разбили на две группы. Доказать, что хотя бы в одной из двух групп найдутся три числа, одно из которых представляет собой среднее арифметическое двух других.

6. Пусть a, b и c — натуральные числа, причём a^3 делится на b, b^3 — на c, а c^3 — на a. Докажите, что $(a + b + c)^{13}$ делится на abc.