Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

11-й класс

1. Можно ли в выражении

$$2 * 0 * 1 * 2 * 2 * 0 * 1 * 2 * \cdots * 2 * 0 * 1 * 2 = 2013$$

(слева — 2013 групп, каждая из которых состоит из цифр 2, 0, 1, 2) поставить вместо звёздочек знаки сложения и умножения (скобки ставить нельзя) так, чтобы получилось верное равенство?

2. Дана квадратная таблица 31×31 (31 строка и 31 столбец). Прямоугольником будем называть любые 4 клетки этой таблицы, если они находятся на пересечении каких-нибудь двух различных строк и каких-нибудь двух различных столбцов. Можно ли заполнить эту таблицу числами ± 1 так, чтобы произведение 4-х чисел любого прямоугольника было отрицательным?

3. Доказать неравенство $x^2z + y^2x + z^2y \geq x^2y + y^2z + z^2x$, если известно, что $x \leq y \leq z$.

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC вне его построены равнобедренные прямоугольные треугольники ABE и BCF с прямыми углами E и F соответственно, D — середина стороны AC. Доказать, что треугольник DEF — равнобедренный прямоугольный с прямым углом D.

5. Множество целых чисел разбили на две группы. Верно ли, что хотя бы в одной из двух групп найдутся три числа, одно из которых представляет собой среднее арифметическое двух других?

6. Пусть длина, ширина и высота некоторого прямоугольного параллелепипеда — натуральные числа. Пусть, далее, V — его объём, S — площадь его полной поверхности, P — его полный периметр (то есть сумма длин всех его 12−и рёбер), p — простое число. Известно, что $V + S + P = p^3 - 8$. Доказать, что данный прямоугольный параллелепипед представляет собой куб.