Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

10-й класс

1. Можно ли в выражении

$$2 * 0 * 1 * 2 * 2 * 0 * 1 * 2 * \cdots * 2 * 0 * 1 * 2 = 2013$$

(слева — 2013 групп, каждая из которых состоит из цифр 2, 0, 1, 2) поставить вместо звёздочек знаки сложения и умножения (скобки ставить нельзя) так, чтобы получилось верное равенство?

2. Можно ли в клетках таблицы 2012×2013 (2012 строк и 2013 столбцов) расставить числа ± 1 так, чтобы произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце было отрицательным?

3. Доказать неравенство $x^2z + y^2x + z^2y \geq x^2y + y^2z + z^2x$, если известно, что $x \leq y \leq z$.

4. Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает сторону AC в точке K, а описанную около ABC окружность — в точке D. Верно ли, что DA будет касательной к описанной около треугольника AKB окружности?

5. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 разбили на две группы. Верно ли, что хотя бы в одной из двух групп найдутся три числа, одно из которых представляет собой среднее арифметическое двух других?

6. Пусть длина, ширина и высота некоторого прямоугольного параллелепипеда — натуральные числа. Пусть, далее, V — его объём, S — площадь его полной поверхности, P — его полный периметр (то есть сумма длин всех его 12−и рёбер), p — простое число. Известно, что $V + S + P = p^3 - 8$. Доказать, что данный прямоугольный параллелепипед представляет собой куб.